Уравнение Лапласа:

$$\triangle u = 0$$

Уравнение Пуассона:

$$\triangle u = f$$

Уравнение на СФ:

$$\triangle u + \lambda u = 0$$

Уравнение Гельмгольца:

$$\triangle u + \lambda u = f$$

Самое общее из них – уравнение Гельмгольца. Два его частных случая – уравнение Пуассона и т.н. уравнение на СФ (почему так называемое? Потому что это я его так называю, а какого-то общепринятого названия у него нет). А уравнение Лапласа – это частный случай и уравнения на СФ, и уравнения Пуассона.
В данной методе будут только однородные уравнения: уравнение Лапласа и уравнение на СФ, которые будут решаться на различных объектах.

Решения u уравнения на СФ ПРИ НУЛЕВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ (!!!) называются собственными функциями данного объекта, на котором задача решается.

Сферические функции.
Решим уравнение на СФ на сфере

$$\begin{cases} \triangle_{\theta\varphi} Y + \lambda Y = 0 \\ |Y(\theta, \varphi)| < \infty \\ Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi) \end{cases}$$

Ещё раз подчёркиваю: на сфере! Не на шаре! Мы сидим на сфере, у нас всего две координаты, θ и φ, и никаких больше. Про то, что есть мир, помимо нашей сферы, мы незнаем.
Оператор треугольник имеет вид

$$\boxed{\triangle_{\theta\varphi} u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}}$$

Как будем решать? Как обычно, представим в виде произведения двух функций

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

Граничное условие периодичности

$$Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi+2\pi)$$

Превратится тогда в Φ(φ)=Φ(φ+2π).
И подставим:

$$\triangle_{\theta\varphi}\Theta(\theta)\Phi(\varphi) + \mu\,\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 0$$

Распишем оператор треугольника:

$$\Phi(\varphi)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right)+\Theta(\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}+\lambda\,\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=0$$

Как мы часто делаем в таких случаях, делим на $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$

Получим:

$$\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right)}{\Theta(\theta)}+\frac{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}}{\Phi(\varphi)}+\lambda=0$$

От фи зависит лишь второе слагаемое, а первое и третье нет. Значит, и второе от φ не зависит, и всё во втором слагаемом, относящееся к φ (т.е. всё, за исключением квадрата синуса θ в знаменателе) –неположительная константа (обозначим её $-m^2$, где m>=0 для определённости). Φ(φ) легко находится:

$$\Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0$$

получаем
Очень простое уравнение. Его решение: C1*cos(mφ)+C2*sin(mφ), где m – любое целое. Почему именно целое? А чтобы выполнялось условие сшивки Φ(φ+2π)=Φ(φ).

Возможно, у вас возник вопрос: а почему во фразе «константа (обозначим её m^2)» я сразу понял, что это неположительная константа, что позволило мне её обозначить как m^2? Дело в том, что если это положительная константа, то вместо синуса и косинуса у нас будут две экспоненты (или шинус и чосинус, если вам так угодно), и с условием сшивки у нас возникнут проблемы: оно будет выполняться только в том случае, если C1=C2=0, что нас категорически не устроит.

А вот с θ всё должно быть весело: уравнение

$$\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right)}{\Theta(\theta)} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + \lambda = 0$$

Обещает быть сложным. Казалось бы, наверняка его решением будет какая-нибудь противная новая функция. Ну вот как решая для задачу для круга пришлось ввести функцию Бесселя.
Оказывается, нет. Ответ - это присоединённая функция Лежандра, взятая от косинуса.
Так, поподробнее.
Присоединённая функция Лежандра (ПФЛ, пенсионный фонд Литвы) определяется двумя натуральными параметрами: m и n (а не одним, как полином Лежандра).

$$P_n^{(m)}(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

Т.е. надо m раз продифференцировать полином Лежандра и домножить на $\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}$. При чётном m присоединённая функция Лежандра – полином степени n, как и исходный полином Лежандра (за счёт дифференцирования степень понижается, а за счёт домножения на $\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}$ она как раз повысится). А вот при нечётном m присоединённая функция Лежандра – это иррациональная функция. Поэтому не говорите «присоединённый полином Лежандра», говорите «полином Лежандра», но «присоединённая ФУНКЦИЯ Лежандра».
Оказывается, что именно присоединённая функция Лежандра – решение вот этого уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0$$

Где $\lambda_n = n(n+1)$. Т.е. не абы какое, а целое, причём не любое целое, а вида n(n+1). Т.е. зная λ, мы знаем n, ну и m мы тоже знаем – оно есть уже в уравнении. Так что подставляем в формулу

$$P_n^{(m)}(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

И выписываем ответ. Ответ будет однопараметрическим, потому что полином Лежандра определён с точностью до константы, чтобы там не писал Боголюбов. Почему не двухпараметрическим, что следовало бы для дифура второго порядка? Другое решение нам не подойдёт из-за неограниченности на концах, даже не будем его искать.

А где же тут сферичность? Да сделаем вот такую замену

$$x = \cos\theta,$$

И получим уже

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta(\theta) = 0,\ \theta \in (0,\pi)$$

Понятно: $1-x^2$ – это ОТТ, будет квадрат синуса, а d/dx превратится в

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\cos\theta} = \frac{d}{d\theta} \Big/ \frac{d\cos\theta}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \Big/ \sin\theta$$

И этот sin в знаменателе мы как раз в начале уравнения видим.
Ещё давайте поделим на Θ(θ) оба слагаемых:

$$\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)}{\Theta(\theta)} + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}\right) = 0,\ \theta \in (0,\pi)$$

В точности то, что нам требовалось решить! Значит, ПФЛ нам подходят. Боголюбов себя не утруждает доказательством, что других решений нет, и я тоже не буду.

Итак, решение уравнения на СФ на сфере:

$$ПФЛ_{nm}(\cos\theta) * ((C1*\cos(m\varphi)+C2*\sin(m\varphi))$$

Такие функции называются ***сферическими*** и они будут собственными функциями (сферы). Ну раз есть собственные функции, то должны быть и СЗ. СЗ – это лямбда из уравнения

$$\triangle_{\theta\varphi} Y + \lambda Y = 0$$

Смотрим решение… а вот оно:

$$\lambda_n = n(n+1)$$

Т.е. возможные лямбды, при которых уравнение на СФ имеет нетривиальное решение, это 2, 6, 12, 20 и каждой лямбде соответствует конечный набор СФ (n будет фиксировано, оно определяется лямбдой, а вот m может быть любым целым от 0 до n – если вдруг m станет больше n, то $ПФЛ_{nm}$ станет тождественным нулём, чего допустить нельзя).

Теперь вылезем со сферы и порешаем уже шарик.
Будем решать два уравнения:
Лапласа

$$\triangle u = 0$$

И на СФ:

$$\triangle u + \lambda u = 0$$

Конечное, первое – частный случай второго при λ=0. Можем сразу решить второе. Но давайте, как Боголюбов, не будем сразу лезть на босса, а пока поднакопим опыт и хитпоинты, решив пока первое уравнение. К тому же в задаче 3 фигурирует именно уравнение Лапласа, так что его решение нам энивей пригодится.
Естественно, делим переменные:

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

И разбиваем лапласиан на радиальную часть и угловую.

$$Y(\theta,\varphi)\ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + R(r)\frac{1}{r^2}\ \triangle_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi) = 0$$

Поделив всё на $R(r)Y(\theta,\varphi)$ и домножив на r^2, получим

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R(r)} + \frac{\triangle_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = 0$$

Оба слагаемых должны быть константы.

Мы знаем, что второе слагаемое может быть константой только в том случае, если

$$\frac{\triangle_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)} = -n(n+1)$$

В этом случае это сферическая функция, для которой у нас явное выражение, см. выше.
Подставим –n(n+1) в выражение. Получим

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R(r)} - n(n+1) = 0$$

Приводя всё к общему знаменателю, получим

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

Это дифференциальное уравнение Эйлера! Будем искать его решения в виде

$$R(r) = r^\sigma$$

Тогда

$$R(r) = r^\sigma,\ R'(r) = \sigma r^{\sigma-1},\ R''(r) = \sigma(\sigma-1)r^{\sigma-2}$$

И подстановка в дифур даст

$$\sigma(\sigma+1) = n(n+1)$$

Одно решение видно сразу, но аккуратнее: уравнение квадратное, есть и второе:

$$\left[\begin{array}{l}\sigma = n\\ \sigma = -(n+1)\end{array}\right.$$

(обращаю ваше внимание, что в конспекте на Тич-ине стоит знак системы вместо знака совокупности:

$$R(r) = r^\sigma,\ R'(r) = \sigma r^{\sigma-1},\ R''(r) = \sigma(\sigma-1)r^{\sigma-2} \Rightarrow$$

$$\sigma(\sigma+1) = n(n+1) \Rightarrow \begin{cases}\sigma = n\\ \sigma = -(n+1)\end{cases}$$

Естественно, это ошибка! Не может быть одновременно и то, и другое. Должен быть знак совокупности).

Таким образом, решение – это

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi) = C_1 r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) + C_2 \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

И эти функции u трёх переменных и двух целых параметров называются ***шаровыми***.

Теперь решим «боссовое» уравнение – уравнение на СФ.

$$\triangle u + \lambda u = 0$$

Первые шаги будут такие же, как и для простого уравнения, что же, повторим их.

Снова делим переменные

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$$

$$Y(\theta,\varphi)\ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + R(r)\frac{1}{r^2}\ \triangle_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi) + \lambda\, Y(\theta,\varphi)\, R(r)\ = 0$$

Поделив всё на $R(r)Y(\theta,\varphi)$, получим

$$\frac{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\triangle_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)}+\lambda=0$$

Аналогично предыдущему случаю заключаем, что

$$\frac{\triangle_{\theta\varphi}Y(\theta,\varphi)}{Y(\theta,\varphi)}=-n(n+1)$$

должно быть константой вида –n(n+1).

Получим, что

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R(r)=0$$

А вот это уже не дифур Эйлера. Но оно очень похоже на то, которое было, когда мы решали такую же задачу для круга. Собственно, и тут у нас функции Бесселя вылезут.
Чтобы из «похоже на УБ» получить «в точности УБ», нужно сделать замену

$$R(r)=\frac{y(r)}{\sqrt{r}}$$

Тогда

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right)y(r),\ 0<r<a$$

А это уже в чистом виде уравнения Бесселя. Для него есть готовое решение

$$y(r)=J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,r\right)\Rightarrow R(r)=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,r\right)}{\sqrt{r}}$$

Напомню, что у УБ есть два решения – функция Бесселя и функция Неймана, но последняя не годится из-за того, что в 0 она стремится к бесконечности.

Собственно, ответ у нас уже есть. Рассмотрим частный случай – когда на границе шара u зануляется. Это соответствует случаю R(радиус шара (он обозначен у Боголюбова буквой «a»)) = 0.

Для этого нужно, чтобы занулялась ФБ при r=a.

$$J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\,a\right)=0$$

Для каждого n существует счётное число лямбд, при которых ФБ зануляется. Такие лямбды будут называться СЗ, а u, им соответствующие -

$$\boxed{u_{knm}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}r\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)}$$

собственными функциями шара, и, обратите внимание, они зависят от трёх параметров.

Давайте вспомним первую методичку и прямоугольник с кирпичом.

$$u_{nm}(x,y)=\sin\frac{\pi n x}{a}\sin\frac{\pi m y}{b}$$

Где в случае с прямоугольником собственные функции были двухпараметрические (число волн в каждом из направлений)

$$u_{nmk}(x,y,z)=\sin\frac{\pi n x}{a}\sin\frac{\pi m y}{b}\sin\frac{\pi k z}{c}$$

И в случае кирпича было три целочисленных параметра (ну три же измерения). Нет ничего удивительного в том, что и для шара мы получили трёхпараметрическое семейство.

$$\boxed{u_{knm}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_k^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{a}r\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)}$$